

1 B 8830 E

# **PÄDAGOGISCHE WELT**

---

Monatsschrift  
für Unterricht und  
Erziehung

**37. Jahrgang**  
**Heft 11 / November 1983**  
**Verlagsort Donauwörth**  
**ISSN 0342-8257**

**PW**

## Diagnose individueller Schülerfehler beim Rechnen mit Brüchen

Trotz neuer Konzeptionen im Zuge der Reform des Mathematikunterrichtes werden bei Schülern immer wieder gravierende Mängel beim Rechnen mit Brüchen festgestellt, obwohl der Aufwand für diesen Stoff in Schulbüchern und laut Klassentagebüchern auch im realen Unterricht groß ist (vgl. Lit. 4). So sagt zum Beispiel *Freudenthal*:

„Daß das Bruchrechnen ein großer didaktischer Mißerfolg ist, kann kaum bezweifelt werden. Ich bin davon überzeugt, daß es so bleibt, solange man es in seinem bisherigen Kontext, nämlich dem des Rechnens, beläßt. Kinder können mit anschaulichen Brüchen anschaulich rechnen. Die übliche anschauliche Einleitung zum Bruchrechnen funktioniert darum auch wie geschmiert, schnell schreitet der Lehrer zum algorithmischen Rechnen fort, zur unvermeidlichen Katastrophe. Mit Hängen und Würgen lernen die Kinder die Regeln des Kürzens und der 4 Rechenarten, um sie beliebig durcheinanderzuwerfen und abzuändern. Es sind doch eben nur sinnlose Spielregeln.“ (vgl. Lit. 1)

Unsere Beobachtungen in zahlreichen Klassen bestätigen weitgehend die Kritik *Freudenthals*. Wir sind aber der Auffassung, daß der Schüler für sicheres Rechnen mit Brüchen nicht nur anschauliche Vorstellungen von Brüchen und Operationen braucht, sondern auch ausreichende algorithmische Fähigkeiten. Deshalb sollten Didaktiker und Lehrer sich mit den spezifischen Schwierigkeiten des Rechnens mit Brüchen auseinandersetzen, um daraus Einsichten für die effektivere Gestaltung des Unterrichts zu gewinnen.

Die Analyse von Schülerfehlern ist ein ergiebiger Weg, die in Lernstoffen enthaltenen und bei Lernprozessen auftretenden Schwierigkeiten empirisch zu erfassen. Seit Jahren werden dazu an der Pädagogischen Hochschule Freiburg im Fach Mathematik Untersuchungen in verschiedenen Stoffgebieten durchgeführt (vgl. Lit. 2, 3, 4), die aus Forschungsmitteln der Hochschule unterstützt werden. Die Untersuchung von Schülerfehlern beim Rechnen mit Brüchen zeigte u. a.:

1. Bestimmte stoffliche Anforderungen einer Aufgabe, sog. Schwierigkeitsmerkmale, lösen bei bestimmten Schülern bestimmte *Fehlermuster* oder *Fehlerstrategien* aus.

2. Über 80% der *Schülerfehler* sind nicht zufällig, sondern zeigen eine bestimmte Regelstruktur. Dies zeigt die Fähigkeit der Schüler, bestimmte Regeln (wenn auch falsche) konsequent anzuwenden und ist zugleich ein Hinweis auf die Möglichkeit der Therapie: Oft genügt es, dem Schüler das Fehlerhafte an seiner Lösungsstrategie (evtl. die Fehlerursache) bewußt zu machen und eine richtige Lösungsstrategie plausibel zu vermitteln.

3. Fehlerstrategien und Fehlergewohnheiten eines Schülers können sich nur an solchen Aufgaben manifestieren, welche das fehlerauslösende Schwierigkeitsmerkmal enthalten. Bei der *Konstruktion einer diagnostischen Aufgabenserie* kommt es also darauf an, mit einer möglichst geringen Anzahl von Aufgaben (Ökonomie) möglichst viele der fehlerauslösenden Schwierigkeiten eines Stoffgebietes zu erfassen (Diagnoseziel).

Die folgenden beiden diagnostischen Tests (vgl. Abb. 1 und 2) zur Bruchrechnung sind das Ergebnis mehrerer Erprobungsfassungen<sup>1</sup>, die wir jeweils in etwa 20 verschiedenen Klassen eingesetzt haben. Bei deren Auswertung versuchten wir, den Testumfang zu verringern, ohne auf wichtige Informationen über Schwierigkeiten der Schüler verzichten zu müssen.

Mit Hilfe der in diesem Beitrag vorgeschlagenen diagnostischen Tests lassen sich systematische Fehler in Schulklassen ohne großen Aufwand finden.

4. Mit den in beiden diagnostischen Tests vorangestellten Aufgaben zu *stofflichen Teilanforderungen* wie Kürzen, Erweitern, Umwandeln, kann man u. a. jene Schüler finden, welche diese Teilanforderungen nur erfüllen, solange sie isoliert auftreten, nicht aber in Verbindung mit den Rechenoperationen (Addieren, Subtrahieren usw.).

5. Für die praktische Durchführung von Fehleranalysen in Schulklassen sind Listen mit Beispielen und Bezeichnungen für häufige Schülerfehler von großem Nutzen. Die in diesem Beitrag folgende *Fehler-*

typenliste (vgl. Abb. 4a–d) ist das Ergebnis einer mehrjährigen Entwicklung. Die Abkürzungen lassen sich – nach etwas Übung – leicht merken, da sie Hinweise auf die Art des Fehlers enthalten.

Die verschiedenen Fehlerstrategien sind entsprechend der jeweils vorkommenden Operation (Addition A, Subtraktion S usw.) einer Fehlerklasse zugeordnet. Bei der Bezeichnung der Einzelfehler (erste und zweite Spalte) wurden gemischte (G) oder natürliche Zahlen (N) nur dann angegeben, wenn dies wesentlich für die Strategie ist, wobei die Angabe der Zahlenart *nach* der Operation nur bei einem fehlerauslösenden *Divisor* erfolgte, wie z. B. bei DN-M. Die Verwechslung einer Operation mit einer anderen wurde durch Bindestrich kenntlich gemacht, z. B. NM-E, A-M, D-S.

Der Lehrer sollte sich durch die umfangreiche Fehlertypenliste nicht abschrecken lassen: Für die Diagnose in seiner Klasse braucht er nur einige der dort gesammelten und systematisch geordneten Fehlertypen.

6. Anhand einer Klassenliste läßt sich eine *Klassendiagnose und daran anschließend ein Plan zur Therapie der häufigsten Fehlerstrategien* einzelner Schüler eines Klassenverbandes auf rationelle Weise erstellen. Eine solche Klassenliste soll für eine Hauptschulklasse (7. Schuljahr) kurz erläutert werden (vgl. Abb. 3).

In der Klassenliste sind für jeden der 23 Schüler die festgestellten Fehlerstrategien eingetragen (Abkürzungen siehe Fehlertypenliste). In einer rechten Spalte bzw. unteren Zeile ist die Anzahl der richtig gelösten Aufgaben je Testaufgabe bzw. je Schüler (Abk.  $\Sigma r.$ ), sowie der prozentuale Anteil (Abk.  $\% r.$ ) und die durchschnittliche Erfolgs- oder Lösungsquote, hier 69%, notiert (jeweils ohne Berücksichtigung der sw-Fehler).

In der Spalte ganz rechts sind die in der *Klasse*, in der untersten Zeile die beim einzelnen *Schüler* systematisch (d. h. in der Regel am häufigsten) aufgetretenen Fehler angegeben.

Die Aufgaben mit der geringsten Lösungsquote (A16, A14, A8) zeigen, daß in dieser Klasse Schwierigkeiten vor allem bei Aufgaben mit vorkommender natürlicher Zahl und bei Kombinationen aus gemischter und natürlicher Zahl auftreten. Dies wird durch die systematischen Fehler der Klasse bestätigt. Bei einem Großteil der Klasse treten Schwierigkeiten in folgenden Stoffbereichen auf, die zweckmäßigerweise mit der *gesamten Klasse*

behandelt werden sollten (lückenschließendes Lehren):

- Null ( $\bar{0}$  und  $ro$  : 9mal in A1c, 11mal in A10)
- Identität ( $\bar{1}$  und  $UNi$  : 7mal in A1a, 4mal in A15)
- Divisor ist eine natürliche Zahl (DN-M : 7mal in A14)
- Divisor ist eine gemischte Zahl (DG-M : 6mal in A16).

Weiterhin sollten gewisse *Schüler in sog. Therapiegruppen* zu folgenden Schwierigkeiten zusammengefaßt werden:

- Multiplikation mit natürlicher Zahl (Schüler Nr. 8, 13, 15, 19)
- Multiplikation bzw. Division mit falscher Hauptnenner-technik (Schüler Nr. 6, 14)
- Multiplikation bzw. Division mit gemischter Zahl (Schüler Nr. 17, 20)
- Kehrwertbildung (Schüler Nr. 4, 8, 14, 17).

Weitere Therapiegruppen zu den Themen Umwandlung gemischter Zahlen, Kürzen, Multiplikation von Brüchen mit gleichen Nennern könnten sich anschließen. (Nähere Hinweise zur Durchführung von Therapiemaßnahmen folgen in einem gesonderten Beitrag in der *Päd. Welt*.)

(Abb. 1–4d siehe die folgenden Seiten)

#### Anmerkungen

Ausgangspunkt dabei waren vor allem die Untersuchungen von Lörcher (vgl. Lit. 4). Die dort zur Konstruktion diagnostischer Tests vorgeschlagene Idee der Diagnosematrix (Tabelle zur Kombination von Schwierigkeitsmerkmalen in Zeilen und Spalten) haben wir weiterentwickelt. Neben allgemeinen Schwierigkeitsmerkmalen (z. B. Zahlenart der Faktoren, Kürzbarkeit des Ergebnisses) sind spezielle Schwierigkeitsmerkmale (z. B. gleiche Nenner bei der *Multiplikation* von Brüchen) zu beachten, deren Existenz und Schwierigkeitsgrad nur empirisch ermittelt werden kann.

#### Literaturangaben

- (1) Freudenthal, H.: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart 1973, S. 248
- (2) Gerster, H.-D.: Fehlermuster beim schriftlichen Subtrahieren, in: *Päd. Welt*, Okt. 1981, S. 620–626, 639–641.
- (3) Gerster, H.-D.: *Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren – Diagnose und Therapie*. Freiburg 1982
- (4) Lörcher, G. A.: Diagnose von Schülerschwierigkeiten beim Bruchrechnen, in: *Päd. Welt*, März 1982, S. 172–180.



Abkürzung	Bemerkungen	Beispiele	verwandte Fehler
<b>A... Fehler beim Addieren</b>			
$\bar{A}$	$\bar{A}L$ Additionsaufgabe nicht gelöst ... Lösungsweg fehlt, Ergebnis richtig		
Aa	Addition mit falscher additiver Technik $\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 + n_2}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{3+6} = \frac{7}{9}$ ; $\frac{7}{7} + \frac{1}{4} = \frac{5}{11}$	
	NAa ... bei natürlicher Zahl	$\frac{1}{6} + 9 = \frac{12}{6}$	
A-M	Addition ersetzt durch Multiplikation $\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{10}{18}$ ; $\frac{7}{7} + \frac{1}{4} = \frac{4}{28}$	
	NA-M ... bei natürlicher Zahl	$\frac{1}{6} + 9 = \frac{17}{6}$	
Akw	Addition mit Kehrwertbildung $\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1}{n_2} + \frac{n_2}{n_1}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{5}{3} + \frac{1}{3} = \frac{6}{3} = 2$	NUkw
	NAkw ... bei natürlicher Zahl	$\frac{1}{6} + 9 = \frac{1}{6 \cdot 9} = \frac{1}{54}$	
A-S	Addition ersetzt durch Subtraktion	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{10}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$	
Ax	sonstiger Fehler beim Addieren		
<b>S... Fehler beim Subtrahieren</b>			
$\bar{S}$	$\bar{S}L$ Subtraktionsaufgabe nicht gelöst ... Lösungsweg fehlt, Ergebnis richtig		
Ss	Subtraktion mit falscher subtraktiver Technik $\frac{n_1}{n_1} - \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 - n_2}$	$\frac{3}{9} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{9-6} = \frac{1}{3}$ oder $\frac{6}{18} - \frac{6}{18} = \frac{0}{0}$	
	NSs ... bei natürlicher Zahl	$2 - 1\frac{2}{5} = \frac{2}{1} - \frac{2}{5} = \frac{2-2}{5} = \frac{-5}{5}$	
S-M	Subtraktion ersetzt durch Multiplikation $\frac{n_1}{n_1} - \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$	$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{35}{64}$ ; $\frac{3}{9} - \frac{2}{6} = \frac{6}{54}$	
	NS-M ... bei natürlicher Zahl	$2 - 1\frac{2}{5} = 2 - \frac{2}{5} = \frac{10}{5} - \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$	
SR	Subtraktionsrichtung falsch	$5\frac{3}{5} - 4\frac{7}{5} = 1\frac{4}{5}$ oder $-1\frac{4}{5}$ ; $2 - 1\frac{2}{5} = 1\frac{3}{5}$ oder $-1\frac{2}{5}$	> 52 ?
S-A	Subtraktion ersetzt durch Addition	$\frac{7}{8} - \frac{5}{8} = \frac{12}{8}$ ; $5\frac{3}{5} - 4\frac{7}{5} = 2\frac{2}{5}$	
	S-Ao ... bei Null (Nullvermeidungsstrategie)	$\frac{3}{9} - \frac{2}{6} = \frac{6-6}{18} = \frac{12}{18}$	
Sx	sonstiger Fehler beim Subtrahieren		
<b>H... Fehler bei der Hauptnennerbildung</b>			
(Hv)			
Hx	Vielfaches des Hauptnenners (kein Fehler!) sonstiger Fehler bei der Hauptnennerbildung, z.B. HN = max(n <sub>1</sub> , n <sub>2</sub> ) oder min(n <sub>1</sub> , n <sub>2</sub> ) oder ggT(n <sub>1</sub> , n <sub>2</sub> )	$\frac{7}{15} + \frac{7}{10} = \frac{70+105}{150}$ ; $\frac{3}{9} - \frac{2}{6} = \frac{12-12}{36}$	H
		$\frac{7}{15} + \frac{7}{10} = \frac{14}{15}$ oder $\frac{14}{10}$ oder $\frac{14}{5}$	
<b>E... Fehler beim Erweitern</b>			
E	Erweitern (im Zähler) nicht ausgeführt $\frac{n_1}{n_1} + \frac{n_2}{n_2} = \frac{n_1 + n_2}{n_1 \cdot n_2}$ oder $\frac{n_1 + n_2}{n_1}$	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{5+2}{6} = \frac{7}{6}$ oder $\frac{7}{12}$ oder $\frac{7}{18}$ ; $\frac{7}{9} - \frac{2}{6} = \frac{4}{18}$ oder $\frac{4}{54}$	Hx
Ea	Erweitern mit additiver Technik	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6} + \frac{2}{6}$ oder $\frac{7}{6} + \frac{2}{6}$ ; $\frac{5}{6} + \frac{18}{15} = \frac{10}{30} + \frac{36}{30}$	
Ei	Erweitern zur Identität	$\frac{7}{7} + \frac{1}{4} = \frac{16+28}{28}$ oder $\frac{28}{28} + \frac{7}{28}$ ; $\frac{5}{6} + \frac{18}{15} = \frac{30}{30} + \frac{36}{30}$	
Ex	sonstiger Fehler beim Erweitern, z.B. Erweitern mit verschiedenen Zahlen, Erweitern über Kreuz	$\frac{5}{3} + \frac{2}{6} = \frac{15}{6} + \frac{2}{6}$ ; $5\frac{1}{10} - 2\frac{4}{15} = 3\frac{3}{30} - \frac{12}{30}$	
	GEx sonstiger Fehler bei der Umwandlung einer gemischten Zahl in einen Bruch bei gleichzeitigem Erweitern	$2\frac{3}{4} - 2\frac{1}{6} = \frac{27}{12} - \frac{25}{12}$ (Bem. $\frac{2 \cdot 6 \cdot 2 + 1}{12} = \frac{15}{12}$ )	
		$2\frac{2}{3} + \frac{5}{6} + 3 = \frac{8}{6} + \frac{5}{6} + 3$ oder $\frac{14}{6} + \frac{5}{6} + 3$	

Abb. 4: Fehlerstrategien beim Rechnen mit Brüchen

Abb. 4a

Abb. 3: Beispiel einer Klassenliste (Hauptschulklasse 7. Schuljahr) zum Multiplikations- und Divisionstest

Abkürzung	Bemerkungen	Beispiele	verwandte Fehler
<b>K Fehler beim Kürzen</b>			
K	Bruch nicht (vollständig) gekürzt	$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ; $\frac{12}{6} = \frac{6}{3} = 2$	
gK	... nach Umwandlung einer gemischten Zahl	$1\frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ ; $9\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	
Kk	Kürzungszahl tritt im Ergebnis auf	$\frac{2}{8} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{12}{6} = \frac{2}{6}$ ; $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$	UNkw
KA	... Addition	$\frac{4}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	
KS	... Subtraktion	$\frac{3}{9} - \frac{2}{6} = \frac{1}{9} - \frac{1}{3}$	
KM	... Multiplikation	$\frac{1}{3} \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{3}$	
KD	... Division	$\frac{3}{3} : \frac{5}{2} = \frac{2}{5}$ ; $\frac{2}{1} : \frac{1}{2}$	D-M
KI	... Identität	$1\frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \frac{5}{4} : \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1$	UNI
Kx	sonstiger Fehler, z.B. Division des Zählers und Nenners mit verschiedenen Zahlen, Kürzen von Ziffern, u.s.w.	$\frac{12}{6} = \frac{3}{2}$ ; $6\frac{1}{2} = 3\frac{1}{4}$ ; $\frac{18}{28} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{45}{4} = \frac{5}{4}$	
<b>M Fehler beim Multiplizieren</b>			
M	Multiplikationsaufgabe nicht gelöst		
ML	... Lösungsweg fehlt, Ergebnis richtig		
Ma	Multiplikation mit falscher additiver Technik	$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{9}{11}$ oder $\frac{9}{28}$ oder $\frac{18}{11}$ ; $\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{6} = \frac{28}{30}$	
Man	... bei gleichen Nennern	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$ oder $\frac{12}{10}$ oder $\frac{7}{10}$	Mhn
NMa	... bei natürlicher Zahl	$5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ oder $\frac{28}{5}$	
NM-E	Multiplikation ersetzt durch Erweitern	$5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{15}{25}$ ; $5 \cdot 1\frac{3}{10} = 5\frac{15}{10}$ ; $\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{18}$	NUi
M-D	Multiplikation ersetzt durch Division	$\frac{2}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{21}{24}$ ; $5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{25}{3}$	
M-Di	... bei identischen Brüchen	$\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{4} = 1$	
NM-D	... bei natürlicher Zahl	$5 \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{25}$	NUkw
(MH)	Multiplikation mit Hauptnennerbildung (kein Fehler!)	$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{21 \cdot 24}{28 \cdot 28} = \frac{504}{784}$	
MH	Multiplikation mit falscher Hauptnenner-technik	$\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{21 \cdot 28}{28} = \frac{504}{28}$ ; $\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{3}{5} \cdot \frac{25}{6} = \frac{18 \cdot 25}{30}$	
Mhn	... bei gleichen Nennern	$\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$	Man
GM1	bei einer gemischten Zahl: Multiplikation (oder Addition) nur mit einem Summanden	$5 \cdot 1\frac{3}{10} = 5\frac{3}{10}$ oder $1\frac{15}{10}$ oder $6\frac{3}{10}$	
GM2	bei zwei gemischten Zahlen: getrennte Multiplikation (oder Addition) der Brüche und natürlichen Zahlen miteinander	$4\frac{5}{8} \cdot \frac{1}{5} = 4\frac{5}{40}$ oder $4\frac{1}{8}$ ; $1\frac{1}{4} : \frac{5}{4} = 1\frac{1 \cdot 4}{4 \cdot 5} = 1\frac{1}{5}$	
Mx	sonstiger Fehler beim Multiplizieren	$2\frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} = 8\frac{1}{4}$ oder $8\frac{2}{2} = 9$ oder $6\frac{1}{4}$ oder $6\frac{3}{2} = 7$	

Abb. 4b

Abkürzung	Bemerkungen	Beispiele	verwandte Fehler
<b>D... Fehler beim Dividieren</b>			
$\bar{D}$	Divisionsaufgabe nicht gelöst		
$\bar{D}L$	... Lösungsweg fehlt, Ergebnis richtig		
D-M	Division ersetzt durch Multiplikation $\frac{a_1}{n_1} : \frac{a_2}{n_2} = \frac{a_1 \cdot n_2}{n_1 \cdot n_2}$	$\frac{2}{5} : \frac{5}{7} = \frac{10}{35}$ ; $\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{25}$ ; $1\frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$	KD
D-MI	... bei invers identischen Brüchen $\frac{3}{4} : \frac{4}{3} = \frac{12}{12} = 1$	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{6}{4}$	
DN-M	... wenn Divisor eine natürliche Zahl ist	$10 : 2\frac{1}{2} = 10 \cdot \frac{2}{5} = \frac{50}{5}$	
DG-M	... wenn Divisor eine gemischte Zahl ist		
ND-E	Division ersetzt durch Erweitern $\frac{a}{n} : g = \frac{a \cdot g}{n \cdot g}$ ; $g : \frac{a}{n} = \frac{g \cdot n}{a}$	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{6}{8}$ ; $10 : 2\frac{1}{2} = 10 : \frac{5}{2} = \frac{50}{5}$	NU1
Dkw	Division mit Kehrwertbildung an falscher Stelle $\frac{a_1}{n_1} : \frac{a_2}{n_2} = \frac{n_1 \cdot a_2}{n_2 \cdot a_1}$ oder $\frac{n_1 \cdot n_2}{a_1 \cdot a_2}$	$\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{5 \cdot 6}{3 \cdot 25}$ oder $\frac{5}{3} \cdot \frac{25}{6}$	GKw NKw NUKw
NDkw	... bei natürlicher Zahl	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2}$ ; $10 : \frac{5}{2} = \frac{1}{10} \cdot \frac{5}{2}$	
DR	Divisionsrichtung falsch	$\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 25} = \frac{18}{125}$ ; $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$	
(DH)	Division mit Hauptnennerbildung (kein Fehler!)	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{2}{1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ ; $\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{15}{25} : \frac{6}{25} = \frac{15}{6}$	
DH	Division mit falscher Hauptnennerbildung $\frac{a_1}{n_1} : \frac{a_2}{n_2} = \frac{a_1 \cdot n_2 : a_2 \cdot n_1}{n_1 \cdot n_2}$ ; $g : \frac{a}{n} = \frac{g \cdot n}{a}$	$\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{75 : 30}{125} = \frac{2,5}{125}$ ; $10 : \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1$	
DHn	... bei gleichen Nennern $\frac{a_1}{n} : \frac{a_2}{n} = \frac{a_1 : a_2}{n}$	$\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$	
Da	Division mit additiver Technik $\frac{a_1}{n_1} : \frac{a_2}{n_2} = \frac{a_1 + n_2 : a_2 + n_1}{n_1 + n_2}$ oder $\frac{a_1 + n_2}{n_1 + n_2}$ oder $\frac{a_1 + n_2}{n_1 + a_2}$	$\frac{3}{5} : \frac{6}{25} = \frac{3 + 25}{5 + 6} = \frac{28}{11}$ oder $\frac{28}{30}$ oder $\frac{25}{11}$	
NDa	... bei natürlicher Zahl $\frac{a_1}{n} : \frac{a_2}{n} = \frac{a_1 - a_2}{n}$ ( $a_1 > a_2$ )	$10 : \frac{5}{2} = 10 \cdot \frac{2}{5}$	
D-S	Division ersetzt durch Subtraktion	$\frac{2}{5} : \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$	
D-Sn	... bei gleichen Nennern		
DG1	bei einer gemischten Zahl (im Divisor): Division nur mit einem Summanden (Kombination der Fehlertypen GKw und GM1)	$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{3} = 1\frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 1} = 1\frac{9}{4}$	GM1 GKw
DG2	bei zwei gemischten Zahlen: getrennte Division (oder Addition) der Brüche und natürlichen Zahlen miteinander (Kombination vom GKw und GM2)	$6\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3} = 6\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 2\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 2\frac{6}{4}$	GM2 GKw
Dx	sonstiger Fehler beim Dividieren	$6\frac{2}{3} : 3\frac{1}{3} = 9\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = 9\frac{2}{4}$	
<b>Kw... Fehler bei der Kehrwertbildung</b>			
$\bar{K}w$	Kehrwertbildungsaufgabe nicht gelöst	Kw von $\frac{1}{3}$ bzw. 2 bzw. $2\frac{3}{4}$ nicht gelöst	
NKw	falsche Kehrwertbildung einer natürl. Zahl	Kw von 2 ist $\frac{2}{10}$ ; $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3 \cdot 0}{4 \cdot 2} = \frac{0}{8}$ ; $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{2}$	NDkw NUx
NKwx	... sonstiger Fehler		
GKw	falsche Kehrwertbildung einer gemischten Zahl	$\frac{3}{4} : 1\frac{1}{3} = \frac{3}{4} \cdot 1\frac{3}{4} = 10 : 2\frac{1}{2} = 10 \cdot 2\frac{2}{4} = 40$	Dkw
GKwx	... sonstiger Fehler bei der Umwandlung der gemischten Zahl in einen Bruch bei gleichzeitiger Kehrwertbildung	Kw von $2\frac{3}{4}$ ist $\frac{6}{4}$ ; $10 : 2\frac{1}{2} = \frac{10}{4} \cdot \frac{5}{1} = \frac{50}{4} = 50$	

Abb. 4c

Abkürzung	Bemerkungen	Beispiele	verwandte Fehler
<b>U Umwandlungsfehler</b>			
$\bar{U}$	Umwandlung eines Bruches in eine gemischte Zahl oder natürliche Zahl nicht ausgeführt	$\frac{61}{30} = 1$ ; $\frac{12}{6} = 1$	
$\bar{U}_1$	... wenn Nenner gleich 1	$\frac{2}{1} = 1$	
$\bar{U}_0$	... wenn Nenner gleich 0	$\frac{0}{18} = 1$ ; $\frac{6-6}{18} = 1$	ro
$\bar{U}_i$	... bei Identität	$\frac{14}{14} = 1$ ; $9\frac{3}{3} = 1$	
$\bar{U}_G$	... unvollständige Umwandlung	$\frac{61}{30} = 1\frac{31}{30} = 1$	
UG	Fehler bei der Umwandlung eines Bruchs in eine gemischte Zahl	$\frac{19}{28} = 1\frac{10}{28}$ ; $\frac{3}{12} = 1\frac{5}{12}$ ; $\frac{3}{8} = 2\frac{2}{3}$ ; $\frac{3}{14} = \frac{19}{9}$	
UGz	... wenn Zähler kleiner als Nenner	$\frac{45}{4} = \frac{1}{45}$ ; $\frac{65}{10} = \frac{10}{65}$	
UGkw	Umwandlung wenn Zähler größer als Nenner ... mit Kehrwertbildungstechnik	$\frac{12}{6} = 1\frac{2}{6}$ ; $\frac{45}{4} = 4\frac{5}{4}$	
UGD	... mit Dezimalbruchtechnik	$\frac{35}{30} = \frac{5}{30}$ oder $1\frac{5}{1}$ ; $\frac{15}{30} = 1\frac{25}{30}$ ; $\frac{5}{2} = 2\frac{1}{5}$	
UGx	... sonstiger Fehler, z.B. natürliche Zahl fehlt oder ist falsch, Zähler und Nenner verwechselt		
UN	Fehler bei der Umwandlung eines Bruches in eine natürliche Zahl	$\frac{12}{6} = \frac{1}{2}$ ; $\frac{2}{1} = \frac{1}{2}$	Kk
UNkw	... durch Kehrwertbildungstechnik	$\frac{14}{14} = 14$ oder $1$ ; $\frac{2}{1} = 1$ oder $1\frac{1}{1} = 1$ ; $\frac{1}{1} = 0$	KI
UNI	... bei Identität	$\frac{36}{2} = 13$ ; $\frac{2}{1} = 0,20$	
UNx	... sonstiger Fehler		
GU	Fehler bei der Umwandlung einer gemischten Zahl in einen Bruch	$2\frac{4}{15} = 1$	
GÜ	Umwandlungsaufgabe nicht gelöst	$2\frac{4}{15} = 2 + \frac{4}{15} = \frac{8}{15}$ oder $\frac{6}{15}$ oder $\frac{23}{15}$ oder $\frac{120}{15}$	
GÜz	... nur Zähler falsch	$2\frac{4}{15} = \frac{34}{4}$ oder $\frac{34}{8}$	
GÜn	... nur Nenner falsch	$2\frac{4}{15} = \frac{8}{30}$ oder $\frac{6}{17}$ oder $\frac{4}{30}$	
GÜzn	... Zähler und Nenner falsch		
NU	Fehler bei der Umwandlung einer natürlichen Zahl in einen Bruch	$\frac{2}{6} + \frac{1}{6} + 9 = \frac{3}{6} + \frac{1}{9}$ ; $5 \cdot 1\frac{3}{10} = \frac{1}{5} \cdot \frac{13}{10}$ ; $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1}$	NMkw NDkw NM-E ND-E
NUkw	... durch Kehrwertbildungstechnik	$2 - 1\frac{12}{5} = \frac{2}{2} - 1\frac{12}{5}$ ; $\frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{6}$ ; $10 : 2\frac{1}{2} = \frac{10}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{20}{5}$	NKwx
NUi	... durch Bildung der Identität	$\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{10}{2}$ ; $10 : 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5}$ <i>als getrennte Einzelgleichungen</i>	
NUx	... sonstiger Fehler		
<b>Fehlerarten allgemeiner Art</b>			
is	offensichtlicher Lese-, Schreib- oder Leichtsinnsfehler	$\frac{10}{1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{10}{5}$ ; $\frac{33}{8} \cdot \frac{1}{5} = \frac{35}{40}$	
e	offensichtlicher Einmaleins- oder Einsundeinsfehler	$\frac{5}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{35}{4}$	
(sw)	Schreibweise oder verwendete Zeichen falsch, Rechnung richtig	$5\frac{1}{10} - 2\frac{4}{15} = 5 - 2 - 3 = \frac{1}{10} - \frac{4}{15} = \frac{3-8}{30} = \frac{33-8}{30} = \frac{25}{30} = 2\frac{5}{6}$	
(swd)	... bei Dezimalschreibweise	$\frac{3}{4} : 2 = 0,75 : 2 = 0,375$	
ro	Fehler beim Rechnen mit der Null	$2 \cdot 0 = 2$ ; $2 + 0 = 0$ ; $\frac{6-6}{18} = 18$ oder $\frac{1}{18}$	$\bar{U}_0$
		$\frac{0}{18} = 18$ oder keine Lösung oder undefiniert	

Abb. 4d